Institut National des Télécommunications **ECOLE DE GESTION**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Mathématiques spéciales)

DUREE : 4 heures

COEFFICIENT : 4

AVERTISSEMENT :

Dans l'évaluation des copies, il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction, notamment pour ce qui est de la présentation, de la clarté des raisonnements et de la concision.

Les résultats des questions non traitées peuvent être utilisés par la suite en indiquant clairement qu'ils sont admis.

L'épreuve comporte deux problèmes obligatoires.

Tous les instruments de calculs sont autorisés.

PROBLEME 1

Notations :

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\{ 1, 2, \ldots , n \}$ qui est inclus dans $\mathbb{N}$.

$\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel complexe des matrices carrées d'ordre n.

La notation : ${}^tP$ désigne la matrice transposée de la matrice P.

$\delta_{r,s}$ représente le symbole de Kronecker c'est-à-dire :

$$\delta_{r,s} = 0 \text{ si } r \neq s \quad \text{et} \quad \delta_{r,s} = 1 \text{ si } r = s.$$

PARTIE A

Une matrice $P = (p_{ij})$, $(i \in \mathbb{K} \ ; \ j \in \mathbb{K})$ est appelée : <u>matrice de permutation</u> si l'on peut trouver une permutation σ de l'ensemble $\mathbb{K}$ tel que : $p_{ij} = \delta_{\sigma(i),j}$

1°) Soit $A = (a_{ij})$, $(i \in \mathbb{K} ; j \in \mathbb{K})$ une matrice de $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$. Donner le terme général des matrices :

$$B = P.A \quad \text{et} \quad C = A.{}^tP$$

en fonction du terme général a_{ij} de la matrice A. Interpréter les résultats obtenus.

2°) Montrer que le produit de deux matrices de permutation est encore une matrice de permutation.

PARTIE B

On dit qu'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ est <u>réductible</u> si l'on peut trouver une matrice de permutation P telle que la matrice : $P.A.{}^tP$ soit bloc - triangulaire supérieur ; c'est-à-dire :

$$P.A.{}^tP = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{array}\right]$$

avec : B_{11} : bloc à r lignes et r colonnes.
B_{12} : bloc à r lignes et (n - r) colonnes.
B_{22} : bloc à (n - r) lignes et (n - r) colonnes.
et r appartenant à $\mathbb{K}$.
Si la matrice A n'est pas réductible, on dit qu'elle est <u>irréductible</u>.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice appartenant à $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$.

1°)
a) On suppose qu'il existe une partition de $\mathbb{K}$ en deux sous ensembles I et J tels que :

$$\forall\, i \in I\ ,\ \forall\, j \in J\ ,\ a_{ij} = 0$$

Montrer qu'alors la matrice A est réductible.

b) Montrer que la réciproque de la proposition énoncée en a) est vraie.
c) Déduire de a) et b) une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ soit irréductible.

2°) On suppose que pour tout couple (i,j) appartenant à $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une suite :
a_{ik_1}, $a_{k_1k_2}$, $a_{k_2k_3}$, ... , a_{k_pj} d'éléments <u>non nuls</u> de A (p entier quelconque).
Montrer qu'alors la matrice A est irréductible.
On admettra la réciproque de cette propriété.

3°)

a) Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est irréductible

b) Soit la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice B est réductible. Déterminer alors la matrice de permutation P telle $P.B.{}^tP$ soit une matrice bloc triangulaire supérieure. Expliciter la matrice $P.B.{}^tP$

PROBLEME 2

Notations :

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes ($i^2 = -1$).

On rappelle que pour x réel, on a : $\cos(ix) = \mathrm{Ch}(x)$ et $\sin(ix) = i.\mathrm{Sh}(x)$.

Le but de ce problème est de montrer que l'équation :

$$z \in \mathbb{C} \ , \ \tan(z).\mathrm{th}(z) + 1 = 0$$

n'a que des racines réelles ou imaginaires pures.
Dans une première partie on montre que l'équation a des racines réelles ou imaginaires pures ; dans la deuxième partie on montre que l'équation ne peut pas avoir des racines du type a + ib avec a ≠ 0.

PARTIE 1

1°) On s'intéresse à l'équation :

$$x \in \mathbb{R} \ , \ W''(x) + \omega^2 W(-x) = 0 \quad (1)$$

dans laquelle : W est une fonction inconnue à valeurs réelles ou complexes, deux fois continuement dérivables pour toutes les valeurs de la variable réelle x et ω un nombre complexe non nul.

a) Montrer que toute fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$f = \phi + \Psi$$

où Φ est une fonction paire et Ψ une fonction impaire.

b) En déduire que la solution générale de l'équation (1) est définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par :

$$W(x) = \alpha.\mathrm{Cos}(\omega x) + \beta.\mathrm{Sh}(\omega x)$$

où α et β sont des constantes arbitraires.

2°) Soit l'équation :

$$z \in \mathbb{C} \ , \ \tan(z).\mathrm{th}(z) + 1 = 0 \quad (2)$$

a) Montrer que si l'on s'intéresse à la recherche des racines réelles de l'équation (2), on peut se limiter à celle des racines réelles positives ou nulles.

b) Montrer que l'équation (2) admet une infinité de racines réelles positives ω_i qui forment une suite croissante :

$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n < \ldots$ avec $(n - \frac{1}{2})\pi < \omega_n < n\pi$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

On rappelle que pour $u > 0$: $|\sin(u)| < \mathrm{Sh}(u)$.

c) On considère l'équation (2) avec $z = ix$ $(x \in \mathbb{R})$. Montrer qu'elle est alors équivalente à l'équation :

$$x \in \mathbb{R} \ , \ \mathrm{th}(x).\tan(x) - 1 = 0 \quad (3)$$

Montrer que l'équation (2) possède une infinité de racines imaginaires pures et que celles dont la partie réelle est positive forment une suite : $i\Omega_1$, $i\Omega_2$, ... , $i\Omega_n$, ... avec : $(n-1)\pi < \Omega_n < (n - \frac{1}{2})\pi$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

3°) Montrer que l'équation (1) a des solutions non nulles vérifiant les conditions : $W(1) = W'(1) = 0$ si et seulement si ω est racine de l'équation (2).

PARTIE 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions de la variable réelle, à valeurs réelles, définies et continues sur $[-1,+1]$.
Soit E" le sous espace vectoriel de E formé des fonctions f de E, deux fois continuement dérivables et vérifiant les conditions : $f(1) = f'(1) = 0$.
Pour tout x appartenant à $[-1,+1]$ et pour tout y appartenant à $[-1,+1]$, on pose :

$$K(x,y) = (x + y) - |x + y|$$

On appelle A, l'application de E dans E, qui à toute fonction f de E fait correspondre la fonction $F = A(f)$ de E définie par :

$$F(x) = \int_{-1}^{+1} K(x,y)\ f(y)\ dy$$

1°)

a) Montrer que : $F(x) = 2 \int_{-1}^{-x} (x + y)\, f(y)\, dy$

b) Montrer que pour toute fonction f appartenant à E, la fonction F = A(f) appartient à E" et que :

$$\forall\, x \in [-1,+1]\ ,\ F''(x) = -2\, f(-x)$$

c) Montrer que A est une application linéaire de E dans E".

2°) Montrer que si F est une fonction quelconque de E", il existe une fonction f de E, unique, telle que A(f) = F.

3°) On munit E du produit scalaire : $< f \mid g > = \int_{-1}^{+1} f(x).g(x)\, dx.$

a) Montrer que l'application linéaire A est telle que :

$$\forall\, (f,g) \in E \times E\ ,\ < A(f) \mid g > = < f \mid A(g) >$$

On dit alors que l'application linéaire A est un opérateur auto - adjoint.

b) Montrer qu'un opérateur auto - adjoint a toutes ses valeurs propres réelles.

4°)

a) Montrer que $\lambda = 0$ ne peut pas être une valeur propre de A.

b) Montrer que si f est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors f appartient à E".

c) En posant : $\omega^2 = \frac{2}{\lambda}$ montrer que la proposition :" f est solution de l'équation (1) définie dans la partie 1 du problème", équivaut à la proposition : " f ~~valeur~~ vecteur propre de A".

5°) En déduire que l'équation (2) définie à la partie 1 du problème n'a pas de racine de la forme a + ib avec a réel non nul et b réel non nul.